Вариант 2023 (страница 1 из 2)

1. Найти вторую производную z''_{xy} в точке $(3,0)$ функции $z(x,y)$, неявно заданной уравнением $z(x+y)+4\cos(zy)=0$.

2. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

в естественном базисе трехмерного пространства. При каком значении параметра a существует двумерное подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$ и содержащее вектор $e=(-1,0,1)$.

3.

	0	1	Λ
q_0	$0\,q_0\,R$	$1\,q_0\,R$	$\Lambda\,q_1\,L$
q_1	$\Lambda\,q_3\,L$	$\Lambda\,q_3\,L$	$1\,q_2\,L$
q_2	$1\,q_2\,L$	$0\,q_2\,L$	$1\,q_1\,L$
q_3	$\Lambda\,q_4\,L$	$0\,q_2\,L$	$1\,q_2\,L$
q_4	$1\,q_4\,L$	$0\,q_4\,L$	$\Lambda\,Halt\,R$

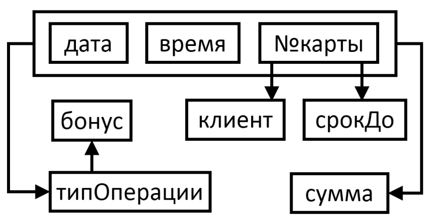
Таблицей задана машина Тьюринга. $Halt$ – состояние останова, q_0 – начальное состояние. L, R и N – сдвиг каретки (влево, вправо, на месте). Λ – «содержимое» пустой ячейки. Вначале на ленте записана лишь входная цепочка. Каретка стоит напротив её начала. В состоянии останова на ленте записана лишь цепочка-результат. Каретка также стоит напротив её начала.

Требуется: A) Составить BNF (Бэкуса-Наура форму), описывающую множество всех цепочек из $(0|1)^*$, к которым применима эта машина Тьюринга. B) Составить BNF, описывающую множество всех цепочек из $(0|1)^*$, к которым не применима эта машина Тьюринга. C) Указать все возможные входные цепочки из $(0|1)^*$, на которых эта машина Тьюринга даёт результат: 0110. Дать обоснование ответу.

4. Дано тело реляционного отношения R1 с первичным ключом {№карты, дата, время}:

клиент	№карты	срокДо	типОперации	дата	время	сумма	бонус
MARISSA GOLD	12	05.24	начисление	01.03.23	8:30	1500	10%
ROLAND BLUM	11	03.25	списание	02.03.23	8:30	500	0%
MARISSA GOLD	12	05.24	списание	02.03.23	18:05	600	0%
ROLAND BLUM	11	03.25	начисление	03.03.23	18:05	500	10%
MARISSA GOLD	13	02.24	начисление	02.03.23	10:30	1000	10%

Все значения, указанные в записи тела отношения, атомарны. Функциональные зависимости в отношении заданы диаграммой:



Проекцией R1 по набору из каких-то пяти атрибутов является отношение R2=PROJECT R1 {a1, a2, a3, a4, a5} $=\Pi_{a1,a2,a3,a4,a5}(R1)$. Имена атрибутов, по которым выполнена проекция, скрыты, но известно: что первичным ключом в R2 является {№карты, дата, время}; что между теми атрибутами, которые входят в проекцию, в R2 сохранены функциональные зависимости с диаграммы; что R2 находится в 3НФ.

Требуется: A) Выписать имена всех атрибутов, по которым взята проекция. B) Дать полное обоснование того, что R2 находится 3НФ. C) Выписать полностью тело отношения R2.

5. Среди точек $(0,0)$, $(-2,-2)$, $(2,0)$, $(4,-2)$ найти особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y + x, \\ \dot{y} &= -y - x/2, \end{cases}$$

и определить для каждой тип устойчивости (асимптотическая устойчивость, устойчивость, неустойчивость). Для каждой из оставшихся точек определить уравнение прямой на фазовой плоскости (x, y), вдоль которой происходит движение фазовой траектории $(x(t), y(t))$ из выбранной точки, а также найти $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

6. Граф G_n без петель и кратных ребер содержит в точности n вершин и $2n$ ребер, причем n из этих ребер образуют простой цикл C на всех вершинах графа, а остальные n ребер служат для того, чтобы каждая вершина графа была одним ребром соединена с каждой из вершин, находящихся от нее через одну вдоль цикла C. Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, в которое можно так раскрасить все вершины графа G, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены в один цвет. Найдите $\max\limits_{k\in\mathbb{N},\, k\geq 18} \chi(G_{6k+2})$. Ответ обоснуйте.

7. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметром 3. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} X_{2k}\right| < \sqrt{n}\right).$$

8. Определить значения параметров c и ξ, при которых квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{5} f(-\xi) + c f(0) + \frac{1}{5} f(\xi)$$

точна на произвольном многочлене третьей степени. Найти абсолютное значение погрешности вычисления интеграла от функции $f(x) = x^4$ по указанной формуле при найденных значениях параметров.

9. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \frac{1}{81} u_{xx},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$
$$u\,(x, 0) = \frac{1}{2} \cos 3x,$$
$$u_t\,(x, 0) = -\frac{1}{6} \sin 3x - 2.$$